第 4 节 高考中抛物线常用的二级结论（★★☆）

内容提要

1．坐标版焦半径、焦点弦公式（设 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线上，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，AB 是抛物线的焦点弦）

标准方程	$y^2=2px(p>0)$	$y^2=-2px(p>0)$	$x^2=2py(p>0)$	$x^2=-2py(p>0)$
焦半径公式	$\lvert PF\rvert=x_0+\frac{p}{2}$	$\lvert PF\rvert=\frac{p}{2}-x_0$	$\lvert PF\rvert=y_0+\frac{p}{2}$	$\lvert PF\rvert=\frac{p}{2}-y_0$
焦点弦公式	$\lvert AB\rvert=x_1+x_2+p$	$\lvert AB\rvert=p-(x_1+x_2)$	$\lvert AB\rvert=y_1+y_2+p$	$\lvert AB\rvert=p-(y_1+y_2)$

2．角版焦半径、焦点弦公式：设抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，O 为原点.

①焦半径公式：设 A 为抛物线上任意一点，记 $\angle AFO=\alpha$，则焦半径 $|AF|=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}$.

证明：作 $AM\perp x$ 轴于 M，先考虑 M 在 F 右侧的情形，如图 1，设 $A(x_0,y_0)$，则 $|FM|=x_0-\dfrac{p}{2}$，

又 $|FM|=|AF|\cos\angle AFM=|AF|\cos(\pi-\alpha)=-|AF|\cos\alpha$，与上式比较可得：$-|AF|\cos\alpha=x_0-\dfrac{p}{2}$，

另一方面，由坐标版焦半径公式知 $|AF|=x_0+\dfrac{p}{2}$，与上式作差消去 x_0 整理得：$|AF|=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}$；

同理可证当 M 在 F 左侧或恰好与 F 重合时，都有 $|AF|=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}$.

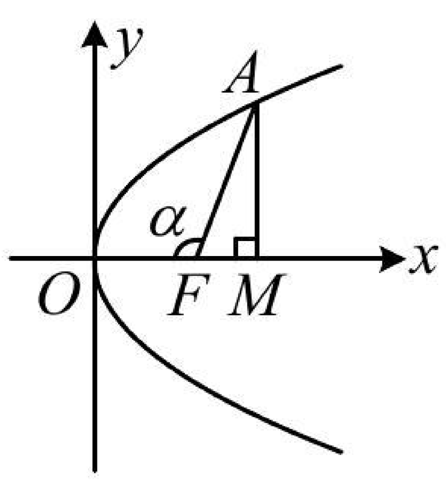


图1

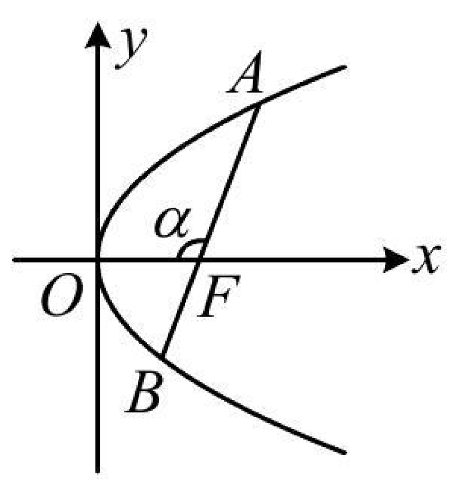


图2

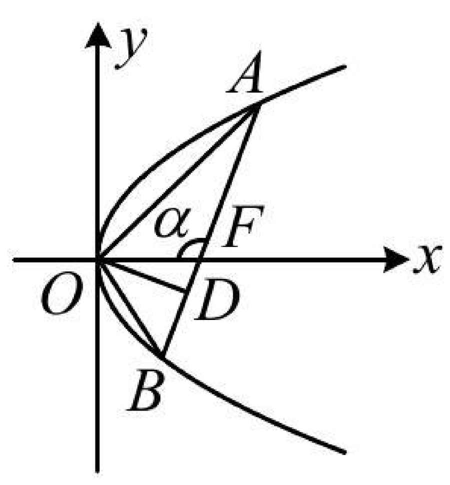


图3

②焦点弦公式：AB 是抛物线的焦点弦，记 $\angle AFO=\alpha$，则 $|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$.

证明：如上图 2，$\angle BFO=\pi-\alpha$，由①中的焦半径公式可得 $|AF|=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}$，$|BF|=\dfrac{p}{1+\cos(\pi-\alpha)}=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}$，

所以 $|AB|=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}+\dfrac{p}{1-\cos\alpha}=\dfrac{p(1-\cos\alpha)+p(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}=\dfrac{2p}{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$.

③焦点弦和原点构成的三角形面积：设 AB 是抛物线的焦点弦，记 $\angle AFO=\alpha$，则 $S_{\Delta AOB}=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}$.

证明：如上图 3，作 $OD\perp AB$ 于 D，则 $|OD|=|OF|\sin\angle OFD=|OF|\sin(\pi-\alpha)=|OF|\sin\alpha=\dfrac{p}{2}\cdot\sin\alpha$，

由②中的焦点弦公式可得：$|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$，所以 $S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|OD|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}\cdot\dfrac{p}{2}\cdot\sin\alpha=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}$.

④焦半径倒数和定值结论：设抛物线的焦点为 F，AB 是抛物线的一条焦点弦，则 $\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}$.

证明：如图 2，由①中的焦半径公式，$|AF|=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}$，$|BF|=\dfrac{p}{1+\cos(\pi-\alpha)}=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}$，

所以 $\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{1+\cos\alpha}{p}+\dfrac{1-\cos\alpha}{p}=\dfrac{2}{p}$.

注：②和③中的 α 可由 $\angle AFO$ 换成 $\angle BFO$ 或直线 AB 的倾斜角，结果不变；但若 α 统一取 $\angle AFO$，则①②③中的结论对各种开口的抛物线都成立，这也是为什么我们要把 $\angle AFO$ 设为 α 的原因.

典型例题

类型Ⅰ：焦半径问题

【例 1】过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点 F 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，若 $|AF|=3$，则 $|BF|=$_____.

解法 1：已知 $|AF|$，可由坐标版焦半径公式求得 A 的坐标，

由题意，$|AF|=x_A+1=3$，所以 $x_A=2$，代入 $y^2=4x$ 可得 $y_A=\pm2\sqrt{2}$，由对称性，不妨设 $A(2,2\sqrt{2})$，

此时可结合点 F 写出直线 AF 的方程，并与抛物线联立求出点 B 的坐标，再算 $|BF|$，

又 $F(1,0)$，所以 $k_{AF}=\dfrac{2\sqrt{2}-0}{2-1}=2\sqrt{2}$，故直线 AF 的方程为 $y=2\sqrt{2}(x-1)$，

联立 $\begin{cases}y=2\sqrt{2}(x-1)\\ y^2=4x\end{cases}$ 消去 y 整理得：$2x^2-5x+2=0$，解得：$x=2$ 或 $\dfrac{1}{2}$，

因为 $x_A=2$，所以 $x_B=\dfrac{1}{2}$，故 $|BF|=x_B+1=\dfrac{3}{2}$.

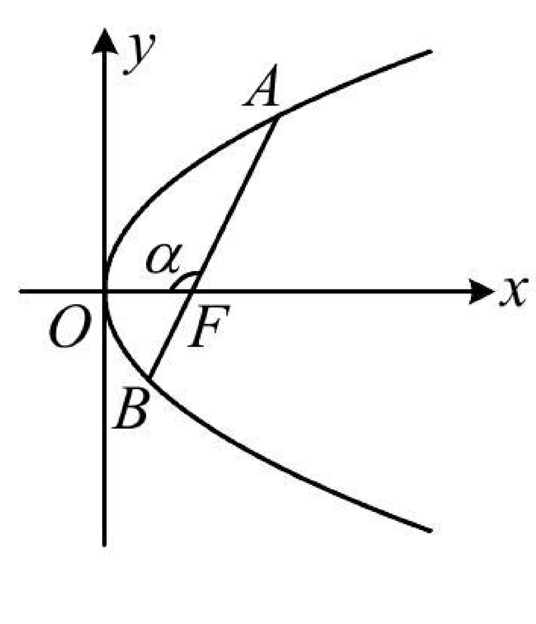
解法 2：如图，已知 $|AF|$，可由角版焦半径公式求得 $\cos\alpha$，并用于求 $|BF|$，

设 $\angle AFO=\alpha$，则 $|AF|=\dfrac{2}{1+\cos\alpha}=3$，所以 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$，故 $|BF|=\dfrac{2}{1+\cos(\pi-\alpha)}=\dfrac{2}{1-\cos\alpha}=\dfrac{3}{2}$.

解法 3：已知 $|AF|$ 求 $|BF|$，也可用结论 $\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}$，

由题意，$p=2$，所以 $\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}=1$，将 $|AF|=3$ 代入可求得 $|BF|=\dfrac{3}{2}$.

答案：$\dfrac{3}{2}$



【变式 1】过抛物线 $C:y^2=2x$ 的焦点 F 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，若 $|AB|=8$，则 $|AF|\cdot|BF|=$_____.

解法 1：$|AB|$和$|AF|\cdot|BF|$都可以用 A，B 的坐标来算，故先设坐标，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$|AB|=x_1+x_2+1$，$|AF|=x_1+\dfrac{1}{2}$，$|BF|=x_2+\dfrac{1}{2}$，

所以$|AF|\cdot|BF|=(x_1+\dfrac{1}{2})(x_2+\dfrac{1}{2})=x_1x_2+\dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{1}{4}$ ①，

涉及 x_1+x_2和 x_1x_2，可将直线与抛物线联立，结合韦达定理来算，

由题意，$F(\dfrac{1}{2},0)$，直线 l 不与 y 轴垂直，可设其方程为 $x=my+\dfrac{1}{2}$，

代入 $y^2=2x$ 整理得：$y^2-2my-1=0$，由韦达定理，$y_1+y_2=2m$，$y_1y_2=-1$，

所以 $x_1+x_2=my_1+\dfrac{1}{2}+my_2+\dfrac{1}{2}=m(y_1+y_2)+1=2m^2+1$ ②，$x_1x_2=\dfrac{y_1^2}{2}\cdot\dfrac{y_2^2}{2}=(\dfrac{y_1y_2}{2})^2=\dfrac{1}{4}$ ③，

故$|AB|=x_1+x_2+1=2m^2+2$，由题意，$|AB|=8$，所以 $2m^2+2=8$，故 $m^2=3$，

将②③代入①可得$|AF|\cdot|BF|=x_1x_2+\dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2m^2+1}{2}+\dfrac{1}{4}=m^2+1=4$.

解法 2：涉及焦点弦$|AB|$和焦半径$|AF|$与$|BF|$，也可设角，用角版的焦点弦、焦半径公式来处理，

如图，设 $\angle AFO=\alpha$，由题意，$|AB|=\dfrac{2}{\sin^2\alpha}=8$，所以 $\sin^2\alpha=\dfrac{1}{4}$，

又$|AF|=\dfrac{1}{1+\cos\alpha}$，$|BF|=\dfrac{1}{1+\cos(\pi-\alpha)}=\dfrac{1}{1-\cos\alpha}$，

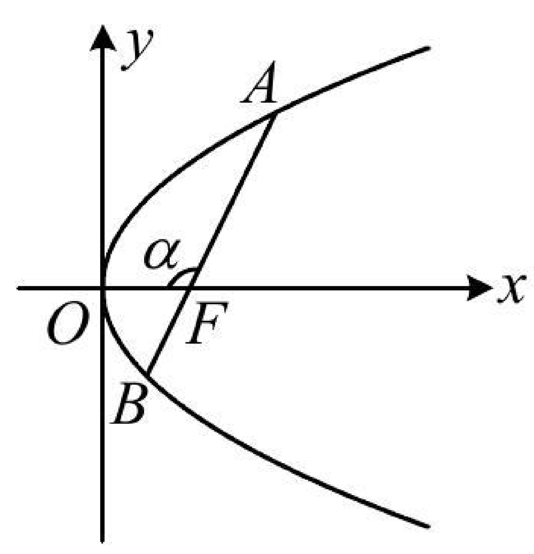
所以$|AF|\cdot|BF|=\dfrac{1}{1+\cos\alpha}\cdot\dfrac{1}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1}{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=4$.

解法 3：注意到$|AB|=|AF|+|BF|$，故将$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}$通分，恰好可求得$|AF|\cdot|BF|$，

由题意，$p=1$，所以$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}=2$，又$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{|BF|+|AF|}{|AF|\cdot|BF|}=\dfrac{|AB|}{|AF|\cdot|BF|}=\dfrac{8}{|AF|\cdot|BF|}$，

所以$\dfrac{8}{|AF|\cdot|BF|}=2$，故$|AF|\cdot|BF|=4$.

答案：4



【反思】从上面两道题可以看出，涉及焦半径、焦点弦的计算，用角版的公式或$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}$计算量往往更小，可作为首选方案，坐标版公式为次选方案.

【变式 2】过抛物线$C:y^2=4x$的焦点 F 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，若$|AF|=2|BF|$，则$|AB|=$_____.

解法 1：由$|AF|=2|BF|$可用角版焦半径公式建立方程求得 $\cos\alpha$，从而求得$|AB|$，

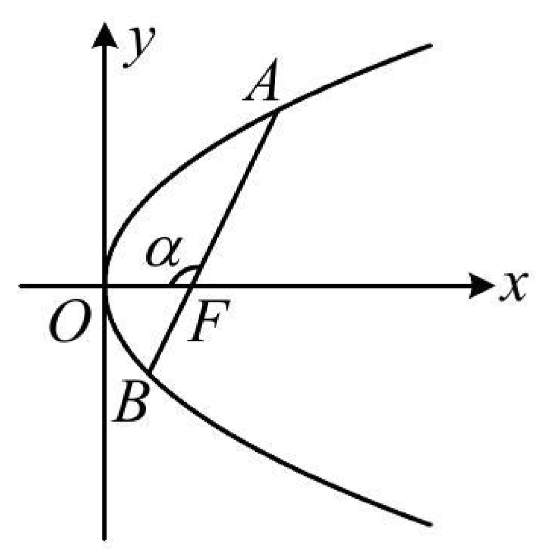
如图，设 $\angle AFO=\alpha$，则 $|AF|=\dfrac{2}{1+\cos\alpha}$，$|BF|=\dfrac{2}{1+\cos(\pi-\alpha)}=\dfrac{2}{1-\cos\alpha}$，

因为 $|AF|=2|BF|$，所以 $\dfrac{2}{1+\cos\alpha}=2\cdot\dfrac{2}{1-\cos\alpha}$，从而 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$，故 $|AB|=\dfrac{4}{\sin^2\alpha}=\dfrac{4}{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{9}{2}$.

解法 2： 由 $|AF|=2|BF|$ 结合 $\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}$ 也可求出 $|AF|$ 和 $|BF|$，进而求得 $|AB|$，

由题意，$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}=1$，结合 $|AF|=2|BF|$ 可得 $|AF|=3$，$|BF|=\dfrac{3}{2}$，所以 $|AB|=|AF|+|BF|=\dfrac{9}{2}$.

答案： $\dfrac{9}{2}$



【变式 3】已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，过 F 且斜率为 $2\sqrt{2}$ 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点（A 在 x 轴上方），若 $|AF|=\lambda|BF|$，则 $\lambda=$（　　）

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）2　（D）$\sqrt{5}$

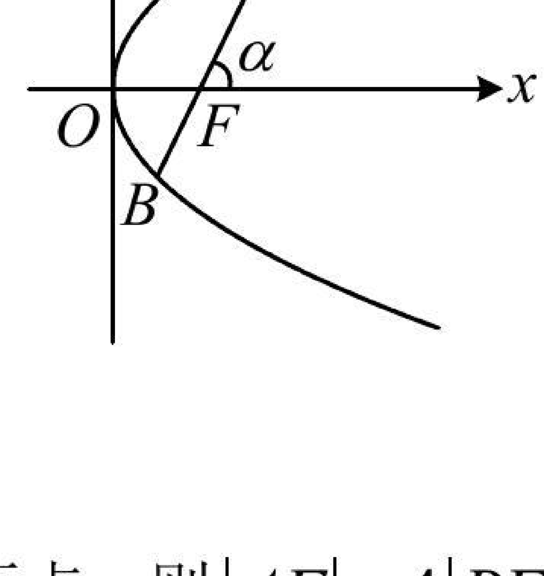
解析： 如图，由斜率可求得 $\cos\alpha$，于是选择角版焦半径公式来计算 $|AF|$ 和 $|BF|$，

设直线 l 的倾斜角为 $\alpha(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$，则 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\sqrt{2}$，结合 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 可得 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，

由图可知 $\angle AFO=\pi-\alpha$，$\angle BFO=\alpha$，所以 $|AF|=\dfrac{p}{1+\cos(\pi-\alpha)}=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}=\dfrac{3p}{2}$，$|BF|=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}=\dfrac{3p}{4}$，

又 $|AF|=\lambda|BF|$，所以 $\lambda=\dfrac{|AF|}{|BF|}=\dfrac{\frac{3p}{2}}{\frac{3p}{4}}=2$.

答案： C



【变式 4】抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，直线 $l:x-my-1=0(m\in\mathbf{R})$ 与 C 交于 A，B 两点，则 $|AF|+4|BF|$ 的最小值是_____.

解析：我们知道 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}$，故可由此将 $|AF|+4|BF|$ 凑成积为定值，用均值不等式求最值，

由题意，$p=2$，直线 l 过定点 $(1,0)$，该定点恰为抛物线 C 的焦点 F，所以 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}=1$，

从而 $|AF|+4|BF|=(|AF|+4|BF|)(\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|})=5+\frac{|AF|}{|BF|}+\frac{4|BF|}{|AF|}\ge 5+2\sqrt{\frac{|AF|}{|BF|}\cdot\frac{4|BF|}{|AF|}}=9$，

取等条件是 $\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{4|BF|}{|AF|}$，结合 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=1$ 可得此时 $|AF|=3$，$|BF|=\frac{3}{2}$，故 $(|AF|+4|BF|)_{\min}=9$.

答案：9

【反思】也可引入 $\angle AFO$ 为变量，用角版焦半径公式求 $|AF|+4|BF|$，但计算量偏大，可自行尝试.

类型Ⅱ：焦点弦问题

【例 2】抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，过 F 且倾斜角为 45° 的直线交 C 于 A，B 两点，若 $|AB|=8$，则 $p=$_____.

解法 1：可写出直线 AB 的方程，与抛物线联立求出 x_A+x_B，用坐标版的焦点弦公式算 $|AB|$，

由题意，$F(\frac{p}{2},0)$，直线 AB 的斜率 $k=\tan 45^\circ=1$，故其方程为 $y=x-\frac{p}{2}$，

代入 $y^2=2px$ 整理得：$x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$，由韦达定理，$x_A+x_B=3p$，所以 $|AB|=x_A+x_B+p=4p$，

又 $|AB|=8$，所以 $4p=8$，解得：$p=2$.

解法 2：给了直线 AB 的倾斜角，用角版焦点弦公式算 $|AB|$ 更简单，

直线 AB 的倾斜角为 $45^\circ \Rightarrow |AB|=\frac{2p}{\sin^2 45^\circ}=4p$，又 $|AB|=8$，所以 $4p=8$，解得：$p=2$.

答案：2

【反思】当抛物线中出现焦点弦以及焦点弦的斜率或倾斜角时，可考虑使用角版焦点弦公式速解.

【变式】已知抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 F，过 F 的直线 l 与抛物线交于 A，B 两点，若点 $M(t,4)$ 是 AB 的中点，则 $|AB|=$（　　）

（A）8　　（B）12　　（C）16　　（D）18

解析：本题没有角度，故联立直线和抛物线，由韦达定理结合坐标版焦点弦公式算 $|AB|$，

由题意，$F(2,0)$，直线 l 不与 y 轴垂直，可设其方程为 $x=my+2$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}x=my+2\\y^2=8x\end{cases}$ 消去 x 整理得：$y^2-8my-16=0$，由韦达定理，$y_1+y_2=8m$，

点 M 的纵坐标是已知的，故可用它求 m，因为 AB 中点 M 的纵坐标为 4，所以 $\frac{y_1+y_2}{2}=4m=4$，故 $m=1$，

再求 x_1+x_2，可利用点 A，B 在直线 l 上转化为 y_1 和 y_2 来算，

$x_1+x_2=my_1+2+my_2+2=m(y_1+y_2)+4=8m^2+4=12$，所以 $|AB|=x_1+x_2+4=16$.

答案：C

类型III：焦点弦与原点构成的三角形面积

【例 3】设 F 是抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点，过 F 且斜率为 1 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，O 为原点，若 ΔAOB 的面积为 $3\sqrt{2}$，则 $p=$（　　）

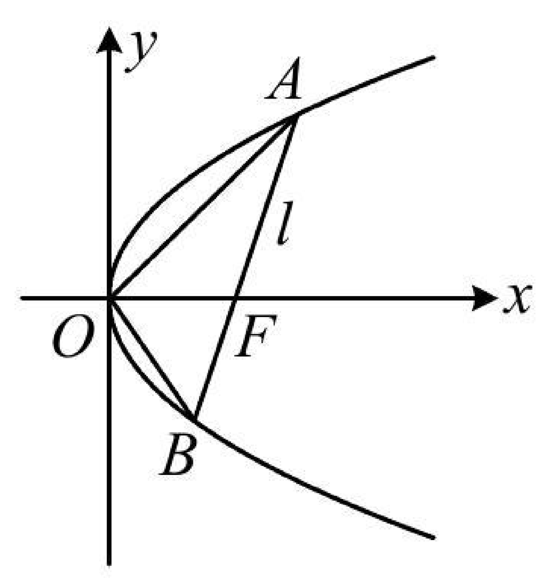
（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\sqrt{6}$　　（C）1　　（D）2

解析：给了直线 l 的斜率，可求得其倾斜角，故可直接代公式 $S=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}$ 计算 ΔAOB 的面积，

如图，直线 l 的斜率为 $1\Rightarrow$ 倾斜角 $\alpha=45^\circ$，所以 $S_{\Delta AOB}=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}=\dfrac{p^2}{2\sin45^\circ}=\dfrac{p^2}{\sqrt{2}}$，

由题意，ΔAOB 的面积为 $3\sqrt{2}$，所以 $\dfrac{p^2}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，解得：$p=\sqrt{6}$.

答案：B



【反思】抛物线中涉及焦点弦与原点组成的三角形的面积问题，都可考虑用面积公式 $S=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}$ 来算.

强化训练

1．（2020 • 新高考Ⅰ卷 • ★★）斜率为$\sqrt{3}$的直线过抛物线$C: y^2=4x$的焦点，且与C交于A，B两点，则$|AB|=$_____.

2．（★★）设F为抛物线$C: y^2=3x$的焦点，过F且倾斜角为30°的直线交C于A，B两点，O为原点，则ΔAOB的面积为_____.

3．（★★★）过抛物线$y^2=2x$的焦点F作直线交抛物线于A，B两点，若$|AB|=\dfrac{25}{12}$，$|AF|<|BF|$，则$|AF|=$_____.

4．（★★★）过抛物线$C: y^2=3x$的焦点F的直线与C交于A，B两点，若$|AF|=2|BF|$，则$|AB|=$_____.

5．（2023 • 广东模拟 • ★★★）已知抛物线$E: y^2=4x$的焦点为F，过F的直线与E交于A，B两点，且$|AF|=3|BF|$，则ΔAOB的面积为（　　）

（A）$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　（B）$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　（C）$4\sqrt{3}$　（D）$8\sqrt{3}$

6．（★★★）已知抛物线$C: y^2=2px(p>0)$的焦点为F，准线为l，过点F作倾斜角为120°的直线与准线l相交于点A，线段AF与C相交于点B，且$|AB|=\frac{4}{3}$，则C的方程为_____.

7．（★★★★）已知F为抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点，过F且倾斜角为45°的直线l与抛物线交于A，B两点，线段AB的中垂线与x轴交于点M，则$\frac{4p}{|FM|}=$_____.